Lösen von quadratischen Gleichungen in Normalform mit einer Lösungsformel (pq-Formel)

Bisher haben wir quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ mit Hilfe der quadratischen Ergänzung gelöst. Führt man mit der Normalform eine quadratische Ergänzung durch, erhält man eine Lösungsformel. [die (wichtige) pq-Formel]

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 && \mid -q \\
x^2 + px &= -q && \mid \text{q. E.} \\
\left(x^2 + px + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 &= -q && \mid \text{Bin. Formel} \\
\left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 &= -q && \mid +\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 && \mid \sqrt{} \\
x + \tfrac{p}{2} &= \pm\sqrt{-q + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2} && \text{Achtung!}
\end{aligned}
$$

pq-Formel $\longrightarrow$ $$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{Diskriminante}}}}$$

Auch wenn die pq-Formel auf den ersten Blick etwas kompliziert aussieht, mit etwas Übung werdet ihr den Vorteil der pq-Formel erkennen.

Lernt folgenden roten Kasten und bearbeitet folgende Aufgaben.

In Formelsammlungen findest du häufig die Schreibweise: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen in der Normalform

Gegeben ist eine quadratische Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$.
Den Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bezeichnet man als **Diskriminante** D.

Für die Lösungsmenge der Gleichung gilt dann:

- Wenn die Diskriminante *positiv* ist, dann gibt es *genau zwei* Lösungen x_1 und x_2, nämlich $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.
- Wenn die Diskriminante D *null* ist, dann gibt es *genau eine* Lösung, nämlich $-\frac{p}{2}$.
- Wenn die Diskriminante D *negativ* ist, dann gibt es *keine* Lösung.

Die Diskriminante D entscheidet über die Anzahl der Lösungen.

4. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $x^2 - 6x - 187 = 0$
b) $x^2 + 2{,}55x - 4{,}5 = 0$
c) $x^2 - 16x + 64 = 0$
d) $x^2 + 9x - 52 = 0$
e) $x^2 + 4x = 0$
f) $x^2 + 10{,}8x - 63 = 0$
g) $x^2 - 7x + 12 = 0$
h) $5x^2 + 25x - 10 = 0$
i) $2x^2 - 3x - 104 = 0$
j) $3y^2 - 4{,}4y - 9{,}6 = 0$
k) $9x^2 + 66x + 137 = 0$
l) $\frac{4}{9}z^2 - 2z + \frac{5}{2} = 0$
m) $2a^2 + 14a = 0$
n) $5y^2 + 14y = 0$
o) $\frac{5}{6}z^2 - 4z + \frac{24}{5} = 0$

5. Kontrolliere Stefans Hausaufgabe.

$x^2 - 4x = 1$
$x(x - 4) = 1$
$x = 1$ oder $x - 4 = 1$
$L = \{1; -3\}$

6. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $12x^2 - 3 = 0$
b) $9x^2 + 16x = 0$
c) $x^2 - 17x + 30 = 0$
d) $2x^2 + 15x + 28 = 0$
e) $x^2 + 6x + 10 = 65$
f) $-3x^2 + 12 = 0$
g) $12x = 5x^2$
h) $8 - 9x + x^2 = 0$
i) $(2x - 5)^2 - (x - 6)^2 = 80$
j) $(x - 6)(x - 5) + (x - 7)(x - 4) =$
k) $(2x^2 - x - 10)(2x - 5) = 0$
l) $(4x^2 - 28x + 49)(7x + 2) = 0$

Übungsaufgaben